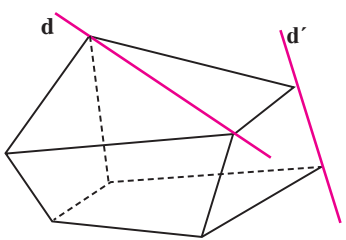


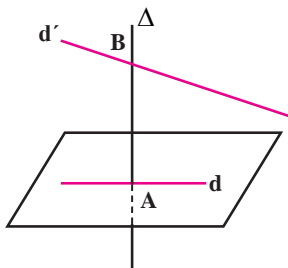
# بحثی در باب خطوط متنافر



شکل ۲.

در ادامه ایشان پرسید: «اگر دو نقطه  $A$  و  $B$  را روی دو خط متنافر به صورت دلخواه در نظر بگیریم و آن دو را به هم وصل کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟»  
**علی** (یکی از دانش‌آموزان) پاسخ داد: «خط جدیدی مانند  $\Delta$  به وجود می‌آید که آن دو خط متنافر را قطع می‌کند.»

آقای سلیمی با تأیید پاسخ او شکل سوم را کشید و به بچه‌ها یادآور شد که در انتخاب نقاط  $A$  و  $B$  کاملاً آزادند. بنابراین بی‌شمار خط مانند  $\Delta$  وجود دارد که هر دو خط متنافر  $d$  و  $d'$  را قطع می‌کنند.

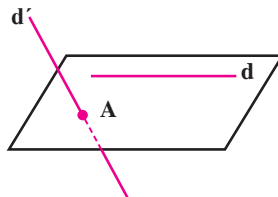


شکل ۳.

آقای سلیمی یکی از سعادتمندترین معلمانی بوده‌اند که من تا به حال دیده‌ام. ایشان در هر کلاسی که کارشان را شروع می‌کردند، جزو کسانی بوده‌اند که در همان ساعت اول نمره ۲۰ را از شاگردانشان می‌گرفتند؛ چه در سواد، چه در رفتار و چه در اخلاق. چند روز افتخار حضور در کلاس درسشان را داشتم که بازگویی اولین خاطره از کلاس ایشان خالی از لطف نیست.

پس از معرفی من به دانش‌آموزان (به‌عنوان مهمان ویژه) و استقرار من در انتهای کلاس (برای اشراف به تخته سیاه و دانش‌آموزان)، ایشان درس آن روز را چنین شروع کرد:

«در جلسه قبل تاحدودی با خط، صفحه، خط عمود بر صفحه، و صفحه‌های موازی و عمود برهم آشنا شدیم و دیدیم که اگر دو خط در یک صفحه واقع باشند، آن دو خط موازی یا متقاطع‌اند. اما ممکن است دو خط در یک صفحه واقع نباشند، یعنی نتوان صفحه‌ای پیدا کرد که شامل آن دو خط باشد. در این صورت می‌گوییم دو خط نسبت به هم متنافرند؛ یعنی از هم گریزان‌اند» و دو شکل ۱ و ۲ را رسم کرد.

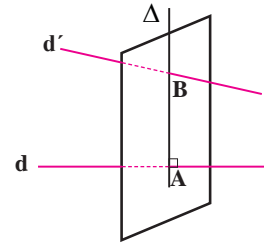


شکل ۱.



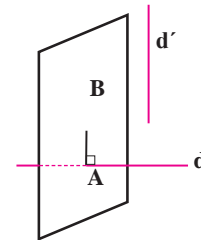
حسین کریمی

حال اگر صفحه‌ای در نقطه دلخواه A از خط  $d$  عمود بر  $d$  رسم شود و آن صفحه، خط  $d'$  را در نقطه B قطع کند، در این صورت خط AB یا همان  $\Delta$  خطی خواهد بود که دو خط متناظر  $d$  و  $d'$  را قطع کرده و عمود بر  $d$  است. بنابراین بی‌شمار خط وجود دارند که  $d'$  را قطع می‌کنند و عمود متقاطع با  $d$  هستند.



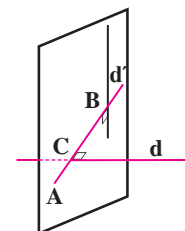
شکل ۴.

محمود (یکی دیگر از دانش‌آموزان) سؤال کرد: «اگر صفحه‌ی گذرا از A و عمود بر خط  $d$ ، به موازات  $d'$  باشد، تکلیف نقطه B چه خواهد شد؟» آقای سلیمی از محمود به خاطر سؤال بسیار خوبش تشکر کرد و شکل پنجم را کشید.



شکل ۵.

بعد از کشیدن شکل، یادآور شد که: «حتی در این حالت نیز بی‌شمار خط مانند  $\Delta$  که  $d'$  را قطع کنند و عمود متقاطع با  $d$  باشند، وجود دارند. فقط کافی است در این حالت، صفحه‌ای را که شامل  $d'$  و عمود بر  $d$  باشد رسم کنیم که اگر نقطه تلاقی صفحه با خط  $d$  را C بنامیم و هر نقطه دلخواه مانند B را روی  $d'$  در نظر بگیریم، BC همان خطی خواهد بود که  $d'$  را قطع کرده و عمود متقاطع با  $d$  است.



شکل ۶.

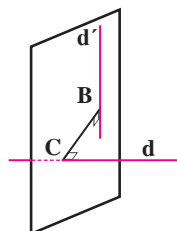
حالا شما بگویید بین این بی‌شمار جواب در حالت اخیر با آن بی‌شمار جواب در حالت قبل چه فرقی وجود دارد؟»

رضا چنین پاسخ داد: «در حالت قبل (عمود برهم نبودن دو خط متناظر) از هر نقطه مانند A روی خط  $d$  فقط یک خط با شرایط خواسته شده می‌توانستیم رسم کنیم، و چون بی‌شمار نقطه مانند A روی  $d$  می‌توان در نظر گرفت، بنابراین مسئله بی‌شمار جواب داشت. اما در حالت اخیر (عمود برهم بودن دو خط متناظر) از هر نقطه مانند A روی  $d$  نمی‌توان خطی با شرایط خواسته شده رسم کرد و فقط یک نقطه از  $d$  مانند C دارای شرایط خواسته شده است. ولی از این بابت می‌توان به هر نقطه دلخواه از  $d'$  وصل کرد و از این بابت است که بی‌شمار جواب به دست می‌آید.»

آقای سلیمی از کیفیت یک خودکار و یک دفتر یادداشت در آورد و آن را به پاس جواب صحیح رضا به او هدیه داد و همه بچه‌ها رضا را تشویق کردند. محمود به رضا گفت: «جواب تو در پی سؤال خوب من بود، پس باید با هم تقسیم کنیم.» که چند لحظه‌ای خنده و شادی در کلاس حاکم شد.

آقای سلیمی بچه‌ها را به سکوت دعوت کرد، ولی قبل از ادامه درس، ناصر پرسید: «آقا اگر در شکل آخر از C عمودی بر  $d'$  رسم کنیم، خطی پدید می‌آید که دو خط  $d$  و  $d'$  را به زاویه قائمه قطع می‌کند. آیا وجود چنین خطی فقط در حالت عمود برهم بودن  $d$  و  $d'$  رخ می‌دهد؟»

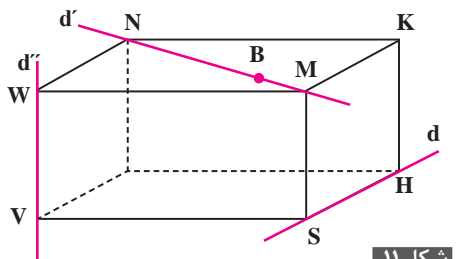
من از اینکه در چنین کلاسی حضور داشتم، بسیار خشنود بودم. سؤال‌ها و جواب‌ها یکی از یکی پخته‌تر و زیباتر بودند. آقای سلیمی پاسخ داد: «بله، مانند شکل ۷، BC به‌طور مشترک بر هر دو خط متناظر  $d$  و  $d'$  عمود است و هر خط که بر دو خط متناظر  $d$  و  $d'$  عمود متقاطع باشد، آن را عمود مشترک دو خط متناظر می‌نامند، ولی نیازی به عمود برهم بودن  $d$  و  $d'$  نیست.»



شکل ۷.

$\Delta$  و  $d$  روی صفحه  $P$  هستند و نقطه اشتراک آن‌ها را  $A$  می‌نامیم.  $\Delta$  و  $d''$  هم روی صفحه  $Q$  قرار دارند و نقطه اشتراک آن‌ها را نیز  $C$  در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که خط  $\Delta$ ، سه خط دوه‌دو متنافر  $d$ ،  $d'$  و  $d''$  را به ترتیب در نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  قطع کرده است. چون نقطه  $B$  به صورت دلخواه روی  $d'$  اختیار شده است، پس بی‌شمار نقطه را روی  $d'$  می‌توان به نام  $B$  در نظر گرفت و به ترتیب ذکر شده عمل کرد. بنابراین مسئله بی‌شمار جواب دارد.

آقای سلیمی از من پرسید: «اگر فصل مشترک دو صفحه  $P$  و  $Q$ ، یعنی خط  $\Delta$ ، به موازات  $d$  یا  $d''$  باشد تا یکی از آن‌ها را قطع نکند، تکلیف چیست؟» پاسخ دادم: «بله، چنین امکانی وجود دارد و در تعداد محدود نقاطی مانند  $B$  که از  $d'$  انتخاب می‌شوند، مشکلی که شما فرمودید رخ می‌دهد. می‌توان از آن تعداد محدود صرف‌نظر کرد که تأثیری در بی‌شمار جواب مسئله ندارد. اجازه بدهید سه خط متنافر را کمی ساده‌تر رسم کنم تا نقاط استثنایی بهتر دیده شوند. خطوط دوه‌دو متنافر  $d$ ،  $d'$  و  $d''$  را روی مکعب مستطیل اختیار می‌کنیم.

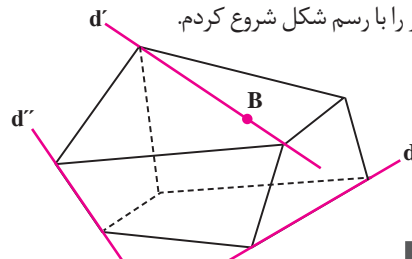


شکل ۱۱.

اگر  $B$  را روی  $M$  در نظر بگیریم، صفحه  $P$  شامل  $d$  و نقطه  $M$ ، همان صفحه  $MKHS$  خواهد بود و صفحه  $Q$  شامل  $M$  و خط  $d''$  (یعنی صفحه  $Q$ )، صفحه  $WMSV$  است که فصل مشترک آن‌ها، یعنی  $MS$  (همان  $\Delta$ )، با  $d''$  موازی است که در این صورت از نقطه خاص  $M$  گذر می‌کنیم. از انتخاب نقطه  $N$  واقع بر  $d'$  به عنوان نقطه  $B$  نیز صرف‌نظر می‌کنیم، چرا که در آن صورت شاهد رخ دادن شرایط فوق خواهیم بود. یعنی خط  $\Delta$  فصل مشترک دو صفحه  $P$  و  $Q$  همان  $NW$  خواهد بود که به موازات  $d$  است.»

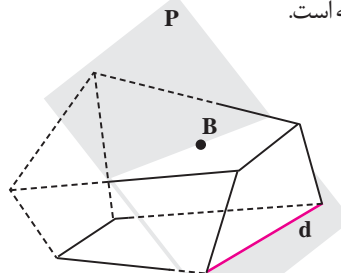
تأیید راه‌حل من از طرف آقای سلیمی باعث خوش‌حالی من شد. حضورم در آن کلاس پرشور و پربار را هرگز فراموش نخواهم کرد.

آقای سلیمی ادامه داد: «حالا، به سؤال اول برگردیم و در آن تغییری ایجاد کنیم. سؤال این بود: چند خط وجود دارد که سه خط دوه‌دو متنافر را قطع کند؟» بچه‌ها مشغول فکر کردن شدند. هر کدام روی کاغذی، شکلی می‌کشیدند و به دنبال حل مسئله بودند. آقای سلیمی چند دقیقه‌ای بود که در کلاس قدم می‌زد. گاهی بالای سر بچه‌ها می‌ایستاد و شکل‌های رسم شده را نگاه می‌کرد و گاهی تذکری می‌داد. وقتی در کنار من ایستاد، آرام پرسید: «تو می‌توانی مسئله را حل کنی؟» چون من قبلاً این سؤال را که یکی از سوالات کنکور بود، دیده بودم و قبلاً در مورد آن فکر کرده بودم، گفتم بله. چند دقیقه گذشت و راه‌حلی از طرف بچه‌ها ارائه نشد. آقای سلیمی از من خواست که برای حل مسئله به پای تخته بروم و برای من افتخار بزرگی بود که بتوانم در خدمت ایشان، مسئله‌ای را حل کنم. پای تخته کار را با رسم شکل شروع کردم.

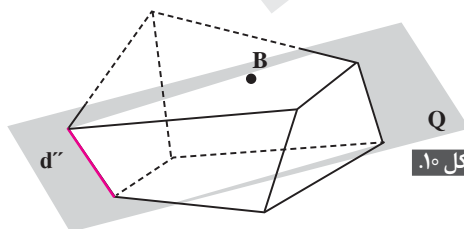


شکل ۸.

روی خط  $d'$  نقطه دلخواه  $B$  را در نظر می‌گیریم. صفحه  $Q$  گذرا از  $B$  و شامل  $d$  را  $P$ ، و صفحه  $d'$  را  $d''$  شامل  $d'$  و  $Q$  می‌نامیم. چون دو خط  $d$  و  $d''$  نسبت به هم متنافرند، در نتیجه در یک صفحه قرار نمی‌گیرند و لذا دو صفحه  $P$  و  $Q$  از یکدیگر متمایز هستند. و چون هر دو از نقطه  $B$  می‌گذرند، پس متقاطع‌اند. فصل مشترک آن دو صفحه را  $\Delta$  می‌نامیم. ادعا می‌کنیم  $\Delta$  که با خط  $d'$  در نقطه  $B$  مشترک است، جواب مسئله است.



شکل ۹.



شکل ۱۰.